بنام خدا

ماخ

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
سی و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۱

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	
۱۵	۱۰	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.
WWW.MAAKH.ir

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخنامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی وکمتر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخنامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰/۷۳ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخنامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شماره گزینه درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینه شماره ۳ درست است باید در مقابل شماره سؤال در پاسخنامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به صورت ۶ هم ایرادی ندارد. ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به علاوه به هیچوجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است، ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱- مأمور آمار، یک سرشماری در شکرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

تعداد اعضای خانواده	۲	۳	۴	۵	۶
درصد	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	۲۰

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲- کم‌ترین مقدار $\frac{a^2}{b}$ در مجموعه زیر چند است؟

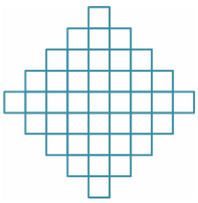
$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, (a+1)(b+1) = ab, 0 \leq b\}$$

۳- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟

۴- در ذوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساق AD و BC برابر ۲ است. زاویه $\angle ABC$ نیز برابر ۱۲۰ درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر ذوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

الف) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $\sqrt{3}-1$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ د) $\frac{5}{9}$ هـ) $\frac{2}{3}$

۵- تعدادی مُهر مربعی شکل با ابعاد 1×1، 2×2، 3×3، 4×4 و 5×5 به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشه‌ی روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مهر را روی نقشه بکوبیم تا همه جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶- چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

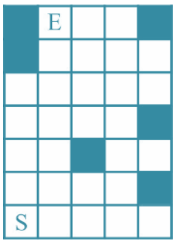
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$$

۷- در لحظه‌ای که ماهواره امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصله ماهواره تا دورترین نقطه‌ی روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ در نظر بگیرید.)

۸- چند چهارتایی (a,b,c,d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کند؟

$$a^b = cd,\quad b^c = da,\quad c^d = ab,\quad d^a = bc.$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۶ د) ۸ هـ) بی‌نهایت



۹- در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانه S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهت‌های بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره‌ها را به خانه E رساند؟

۱۰- حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتای از آن‌ها مربع کامل باشد؟

۱۱- برای دو عدد طبیعی a و b عمل $\wedge$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \wedge b = a^b$. عمل $\otimes$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

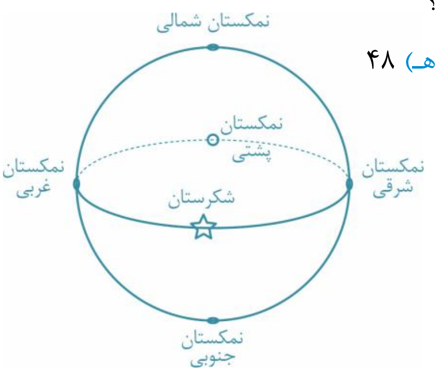
$$a \otimes b = (\ldots((a \wedge a) \wedge a) \wedge \ldots \wedge a)$$

که در عبارت سمت راست، a، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

الف) $a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$ ب) b^a ج) a^{ab} د) $a^{a^{b-1}}$ هـ) ab^{b^a}

۱۲- در مثلث ABC، میانه‌های نظیر رأس B و C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد، طول ضلع BC چقدر است؟

۱۳- سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند؛ نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیک خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟



الف) ۱۶ ب) ۲۰ ج) ۳۲ د) ۴۰ هـ) ۴۸

۱۴- به تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f+g$ و $f\times g$ و fog به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

الف) $\min(m,n)\ ,\ mn, mn$ ب) $\max(m,n)\ ,\ m+n, mn$ ج) $n^m\ ,\ mn, m+n$

د) $mn\ ,\ mn, m+n$ هـ) $mn,\ mn, \max(m,n)$

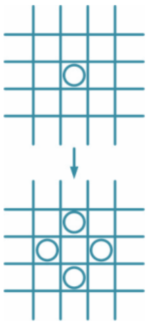
۱۵- در ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$، $(\angle A = \angle D = ۹۰^\circ)$، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB، درون پاره‌خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB = ۱$ و طول پاره‌خط‌های BC، CD و DA به ترتیب p، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادله زیر هستند؟

الف) $x^۲ + px + q$ ب) $x^۲ - rx + q$ ج) $x^۲ - px + q$

د) $qx^۲ + rx + p$ هـ) $px^۲ - qx + r$

۱۶- جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{۱}{۹۰}, \frac{۲}{۹۰}, \dots, \frac{۹۰}{۹۰}$، بعد از ساده‌کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۷- در خانه‌های یک شبکه مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هر کدام به یکی از چهار خانه مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانه‌ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانه مجاور خانه آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)



۱۸- چند زیر مجموعه چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعه $\{۲, ۸, ۹, ۳۲, ۳۶, ۱۴۴\}$ شود؟

۱۹- تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ این‌گونه تعریف شده است که $f(۱) = ۱$ و برای $n > ۱$ اگر تجزیه n به عوامل اول به صورت $n = p_۱^{r_۱} \dots p_k^{r_k}$ باشد، آن‌گاه $f(n) = r_۱^{p_۱} \dots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟ ($p_i$ ها اعداد اول متمامیزند و r_iها اعداد طبیعی هستند.)

الف) f پوشا است.

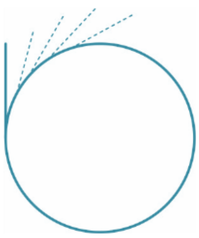
ب) f یک‌به‌یک است.

ج) اگر a و b عضو برد f باشند، آن‌گاه ab عضو برد f است.

د) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n) \le f(mn)$.

هـ) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n) \ge f(mn)$.

۲۰- چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیله محوری به زمین متصل شده، طوری که می‌تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله‌ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ ۶۰ درجه بچرخد، نزدیک‌ترین گزینه به مساحت نقطه‌هایی که این میله از روی آن‌ها عبور می‌کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظه بینی را نشان می‌دهد.)



الف) ۲۰ ب) ۳۰ ج) ۴۰ د) ۵۰ هـ) ۶۰

۲۱- دنباله $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل‌خواه $a_۱$ و $a_۲$ شروع می‌شود و جمله‌های بعدی آن از رابطه $a_{n+۲} = \max\{a_{n+۱} - ۱, a_n + ۱\}$ به دست می‌آید. اگر $a_{۱۰۰} = ۱۰۰$، بیشترین مقدار ممکن برای $a_۱$ چند است؟

۲۲- احسان و حسام در جدولی ۲×۳ مطابق شکل، با هم مهره بازی می‌کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می‌تواند یک مهره در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار دهد و یا یکی از مهره‌های موجود را به خانه سمت راستش یا خانه بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام یک ازخانه‌های شماره‌گذاری شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

	۱
۳	۲
۴	

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

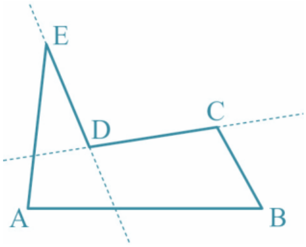
هـ) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

۲۳- تعداد جواب های معادله زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^2 + y^2 = xy(x,y) + [x,y]$$

منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک x و y و منظور از $[x,y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.

۲۴- منظور از یک ضلع «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلع مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های CD و DE ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟



۲۵- روی سطح کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ هـ) ۱۷

کلید سوالات

سوال	پاسخ	سوال	پاسخ	سوال	پاسخ
۱		۲۱		۴۱	
۲		۲۲	هـ	۴۲	
۳		۲۳		۴۳	
۴	هـ	۲۴		۴۴	
۵		۲۵	ب	۴۵	
۶		۲۶		۴۶	
۷		۲۷		۴۷	
۸	ب	۲۸		۴۸	
۹		۲۹		۴۹	
۱۰		۳۰		۵۰	
۱۱	د	۳۱		۵۱	
۱۲		۳۲		۵۲	
۱۳	ج	۳۳		۵۳	
۱۴	الف	۳۴		۵۴	
۱۵	ب	۳۵		۵۵	
۱۶		۳۶		۵۶	
۱۷		۳۷		۵۷	
۱۸		۳۸		۵۸	
۱۹	ج	۳۹		۵۹	
۲۰	د	۴۰		۶۰	

* سوالاتی که جواب آنها داده شده است فقط بصورت چهار گزینه‌ای بوده و باقی سوالات بصورت تشریحی می‌باشد.

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

۱- توجه کنید که در یک خانواده‌ی n نفری، n نفر زندگی می‌کنند! پس پاسخ سوال این گونه محاسبه می‌شود:

$$\frac{۲\times ۱۰}{۲\times ۱۰ + ۳\times ۳۰ + ۴\times ۳۰ + ۵\times ۱۰ + ۶\times ۲۰} = \frac{۲۰}{۴۰۰} = \%۵$$

۲-

$$(a+۱)(b+۱) = ab \Rightarrow ab + a + b + ۱ = ab \Rightarrow a = -(b+۱)$$

اکنون داریم که

$$\frac{a^۲}{b} = \frac{(b+۱)^۲}{b} = ۲ + b + \frac{۱}{b}$$

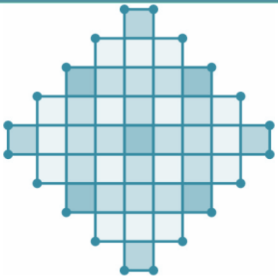
و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $۲ + b + \frac{۱}{b} \geq ۲ + ۲\sqrt{b\times \frac{۱}{b}} = ۴$ و این مقدار با قرار دادن a=-۲ و b=۱ به دست می‌آید.

۳- توجه کنید که عدد ۳ تنها می‌تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می‌تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می‌تواند کنار عددهای ۴ و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می‌تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی‌توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آن‌ها در جایگاه اول ودیگری در جایگاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می‌فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- **گزینه‌ی [هـ] صحیح می‌باشد.**

عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است، پس CY و DX برابر ۱ هستند. پس CD برابر ۶=۱+۴+۶ است. طبق قضیه‌ی تالس می‌دانیم $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ پس مقدار خواسته شده برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶}$ است.

۵- گوشه‌های تیز شکل (نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. هم‌چنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی جدیدی نمی‌گردد(چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر n بار از مهرها استفاده کنیم تعداد گوشه‌های پوشانده شده از $۴ + ۲(n-۱)$ بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس n حداقل ۹ است. در شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



۶- توجه کنید که $y \neq -1$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $11=-1$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $(x+1)(y+1)=12 \Rightarrow \frac{12}{y+1}-1=\frac{11-y}{y+1}$ با جای‌گذاری x در عبارت اول داریم:

$$\left(\frac{11-y}{y+1}\right)^2 y+\frac{11-y}{y+1}y^2=30 \Rightarrow \frac{11-y}{y+1}y\left(\frac{11-y}{y+1}+y\right)=30$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11-y}{y+1}\right)y\left(\frac{11+y^2}{y+1}\right)=30$$

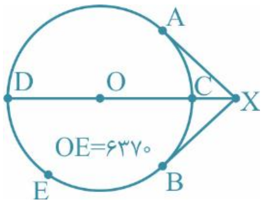
$$\Rightarrow (11-y)(11+y^2)y=30(y+1)^2 \Rightarrow 121y-11y^2+11y^3-y^4$$

$$=30y^2+60y+30$$

$$\Rightarrow y^4-11y^3+41y^2-61y+30=0$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.

۷- می‌توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که: $XC=256, OC=OD=6370$ و سؤال از ما طول XA را می‌خواهد. طبق رابطه‌ی قوت نقطه‌ی X داریم: $XA^2=XC.XD=256\times(2\times 6370+256)$ پس $XA=1824$.



۸- **گزینه‌ی [ب] صحیح می‌باشد.**

اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب‌ها هستیم پس فرض می‌کنیم این اعداد همگی بزرگ‌تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم:

$a^b b^c c^d d^a = a^2b^2c^2d^2$ ولی چون فرض کردیم همه‌ی چهار عدد مسئله بزرگ‌تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت: $a^b b^c c^d d^a \geq a^2b^2c^2d^2$. پس اکنون حالت تساوی رخ داده است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- از خانه‌های سطر بالایی شروع می‌کنیم و روی هر خانه تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی E را با شروع حرکت از آن خانه می‌نویسیم. همین کار را برای سطرهای پایینی هم انجام می‌دهیم. اگر برای خانه‌ی X، خانه‌هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می‌توان از X به آن‌ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن از X به E (با شروع حرکت از خود خانه‌ی X) برابر مجموع تعداد راه‌های رسیدن از خانه های بالایی آن خانه به E است. پس کل زیر به دست می‌آید و جواب ۹۶۰ است.

	E:۱	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
S:۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

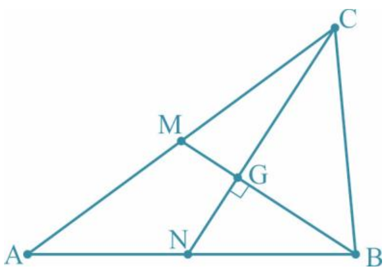
۱۰- فرض کنید که $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_1 = xb_1^2$ که X عددی خالی از مربع (یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش‌پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq 2$: $a_i = x \times b_i^2$. و چون b_i اعداد متمایز بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر مساوی $\sqrt{1391}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر $\left\lfloor\sqrt{1391}\right\rfloor=37$ است. حال توجه کنید که ۳۷ عدد $1^2, 2^2, \dots, 37^2$ در شرایط سؤال صدق می‌کنند. پس جواب سؤال ۳۷ است.

۱۱- **گزینه‌ی [د] صحیح می‌باشد.**

کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y\times z}$ پس به سادگی و با استقرار می‌توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-1}}$ است.

۱۲- با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می‌کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه‌اند پس $MN = \frac{BC}{2}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$MC^2 + NB^2 = MG^2 + CG^2 + NG^2 + BG^2 = BC^2 + MN^2 = BC^2(1+\frac{1}{4})$$



حال با جای‌گزاری مقادیر MC و NB داریم:

$MC^2 + NB^2 = 11^2 + (\frac{19}{2})^2 = \frac{484+361}{4} = \frac{845}{4}$ پس مقدار BC^2 برابر $\frac{845}{4} \times \frac{4}{5} = 169$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.

۱۳- **گزینه‌ی [ج] صحیح می‌باشد.**

به علت تقارن «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)

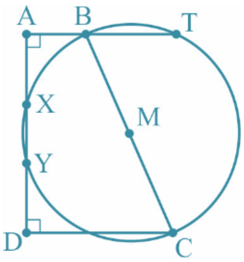
۱۴- **گزینه‌ی [الف] صحیح می‌باشد.**

فرض کنید برد f اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و برد g اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ باشند. برد حاصل جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه ی اعداد صفر می‌دهد. G تابعی است که به عدد طبیعی x ، n باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید mn عدد متمایز خواهیم داشت.

برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این گونه‌باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها و n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد.g تابعی است که به عدد طبیعی x، توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\left[\frac{x}{n}\right]$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایزاند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f، m عضوی است پس خروجی fog نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس fog نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min \; m, n$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که: f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. هم‌چنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

۱۵- **گزینه‌ی [ب] صحیح می‌باشد.**



از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = 1 \times DC = q$ از طرفی AX=YD پس:

$AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^2 - (AX + AY)x + AX \times AY$

پس پاسخ سؤال $x^2 - rx + q$ است.

۱۶- دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{10}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخش‌پذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می بینیم که تنها سه کسر $\frac{2}{10}$، $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ و $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- توجه کنید که در مرحله n، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سؤال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی (۱،۱) را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف D,R,U و L است که $R=L+۱$ و $U=D+۱$ و به علاوه حاصل جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف D,R,U و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین وچپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱- $L=۰, R=۱, D=۲, U=۳$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!}=۶۰$ است.

حالت ۲- $L=۱, R=۲, D=۱, U=۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!}=۱۸۰$ است.

حالت ۳- $L=۲, R=۳, D=۱, U=۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!}=۶۰$ است.

پس در کل ۳۰۰=۶۰+۱۸۰+۶۰ حالت داریم.

۱۸- فرض کنید اعداد ما $P<q<r<s$ باشند. داریم: $pq<pr<ps, qr<qs<rs$ پس دو حالت داریم:

حالت ا: $pq=۲, pr=۸, ps=۹, qr=۳۲, qs=۳۶, rs=۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\frac{q}{p}=۴, \frac{r}{p}=۱۶, \frac{s}{p}=۱۸$$

و با توجه به این که pq=۲ پس $p=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و در نتیجه $q=۲\sqrt{۲}$، $r=۸\sqrt{۲}$ و $s=۹\sqrt{۲}$.

حالت ۲. $pq=۲, pr=۸, qr=۹, ps=۳۲, qs=۳۶, rs=۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

$$\frac{q}{p}=\frac{۹}{۸}, \frac{r}{p}=\frac{۹}{۲}, \frac{s}{p}=۱۸$$

و با توجه به این که pq=۲ پس $p=\frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $q=\frac{۳}{۲}$، r=۶ و s=۲۴.

و توجه کنید که هر دوی این جواب‌ها درست هستند.

۱۹- **گزینه‌ی [ج] صحیح می‌باشد.**

مثال نقض برای گزینه‌ی۱: از آن‌جایی که همیشه $p_i \geq ۲$، f هیچ عددی نمی‌تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه‌ی۲: $f(۲)=۱=f(۳)$. پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه‌ی۴: $m=۴, n=۸ \Rightarrow f(۴)f(۸)=۴\times۹=۳۶>۲۵=f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه‌ی۵: $m=۲, n=۲ \Rightarrow f(۲)f(۲)=۱\times۱=۱<۴=f(۴)$

دلیل درستی گزینه‌ی۳: خروجی تابع نمی‌تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر p_i, r_i است و اعداد اول (p_i)ها، بزرگ‌تر مساوی دو هستند. حال ادعا می‌کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_۱^{r_۱}p_۲^{r_۲}...p_k^{r_k} (r_i \geq ۲)$ دقیقاً در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_۱^{r_۱}p_۲^{r_۲}...p_k^{r_k} (r_i \geq ۲)$ باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگ‌تر مساوی ۲ را می‌توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i=۲a_i+۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $۲^{p_۱^{a_۱}p_۲^{a_۲}...p_k^{a_k}}۳^{p_۱^{b_۱}p_۲^{b_۲}...p_k^{b_k}}$ برابر $p_k^{۲a_۱+۳b_۱}p_۲^{۲a_۲+۳b_۲}...p_k^{۲a_k+۳b_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. هم‌چنین اعداد معرفی شده نسبت به ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.

۲۰- **گزینه‌ی [د] صحیح می‌باشد.**

اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $100\sqrt{2}$ ایجاد خواهد کرد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

$$(100\sqrt{2})^2 - \pi(100)^2 = 100\pi \simeq 314$$

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{314}{6}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- می‌دانیم $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$. با چند بار استفاده از این رابطه داریم:

$$a_4 = \max\{a_3 - a_4 \le a_6 - 1 \le a_8 - 2 \le \cdots \le a_{100} \le -48 \le 52\}$$

$1, a_2 + 1\}$ پس $a_3 \le 53$ و چون $a_n \le a_{n+2} - 1$ پس $a_1 \le a_3 - 1 \le 52$ پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{2n+1} = 52 + n$ و $a_{2n} = 51 + n$.

۲۲- **گزینه‌ی [هـ] صحیح می‌باشد.**

ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

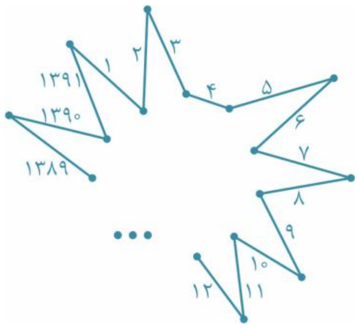
الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه پر را یک واحد بالا (به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. X و y را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$$x^2 + y^2 = xy(x,y) + [x,y] = (d^2)(x'^2 + y'^2) = d^3x'y' + dx'y'$$
$$\Rightarrow d(dx' - y')(dy' - x') = 0$$

و چون $y \ge x \Rightarrow y' \ge x'$ پس $(dx' - y') = 0 \Rightarrow y' = dx'$ و چون x و y نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $x' = 1, y' = d$ پس جواب‌ها دقیقا d و d^2ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ا تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از ۱۸۰ درجه و یکی از دو زاویه کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ ضلعی ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایا یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از ۱۸۰ درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- **گزینه‌ی [ب] صحیح می‌باشد.**

هنگامی که دایره‌ی nام را اضافه می‌کنیم حداکثر در $۲(n-۱)$ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $۴ = ۲ \times ۲$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم حداکثر $۶ = ۳ \times ۲$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر ۱۴=۶+۴+۲+۲ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که ۴ دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه‌تایی در یک نقطه به هم نرسند ۱۴ ناحیه خواهیم داشت.